

Optimisation de la représentation réduite d'une paroi thermique

C. BENARD

UA Paris VI—CNRS No. 871, Campus Universitaire, 91405 Orsay Cédex, France

(Reçu le 10 Juin 1985 et sous forme révisée le 14 Septembre 1985)

Résumé—En vue d'applications à la commande optimale de systèmes thermiques, on décrit une paroi thermique linéaire par un système différentiel ordinaire de très faible dimension, optimisé. L'optimisation porte sur la matrice de transfert approchée associée au système pour les entrées et sorties en cause; la représentation d'état réduite en est ensuite déduite. On montre que pour un nombre donné de pôles de la matrice de transfert réduite, la dimension minimale de la représentation d'état associée augmente avec le nombre de sorties considérées. Ce n'est qu'en se restreignant à une certaine classe de matrices de transfert réduites que l'on peut établir, pour un système multisortie, une représentation d'état de dimension égale au nombre de pôles.

1. INTRODUCTION

CET ARTICLE se situe dans le cadre d'une étude plus vaste visant la description simplifiée du comportement dynamique de certains systèmes thermiques—c'est à dire de systèmes dont l'état est un ensemble de températures—en vue d'aborder le problème de la commande optimale de tels systèmes. Les systèmes envisagés sont constitués par des parois thermiques linéaires couplées par convection ou rayonnement. En pratique, de tels systèmes décrivent par exemple un bâtiment ou certains fours ou échangeurs. Les commandes portent soit sur des termes de couplage (débits massiques par exemple), soit sur des termes sources, soit sur certaines températures. Typiquement les problèmes de commande optimale que l'on rencontre consistent à établir l'expression de ces grandeurs de commande en fonction du temps (boucle ouverte) ou en fonction de certaines sorties du système (boucle fermée), de manière à optimiser un critère de fonctionnement plus ou moins complexe.

D'un point de vue très général, le problème de la commande d'un système thermique peut être soumis à deux approches différentes.

D'une part, des études théoriques rigoureuses traitent directement du contrôle optimal des équations aux dérivées partielles décrivant les transferts de chaleur [1-5].

D'autre part, en pratique, la solution de problèmes de commande optimale sur des systèmes réels fait appel à des méthodes d'approximation, souvent très lourdes et dont les justifications ne sont pas toujours faciles à établir [1]: il s'agit par exemple de méthodes de troncature [6, 7] ou, dans les cas linéaires, de l'utilisation de fonctions de transfert rationnelles approchées [8, 9]. C'est à cette toute dernière catégorie d'approximation, limitée aux cas linéaires, que nous nous intéressons dans cet article.

Si les entrées et les sorties des systèmes sont les vecteurs $U(t)$ et $\Phi(t)$ respectivement, de transformées de

Laplace $\hat{U}(p)$ et $\hat{\Phi}(p)$, la matrice de transfert $\mathcal{H}(p)$ caractérisant le système est telle que

$$\hat{\Phi}(p) = \mathcal{H}(p)\hat{U}(p). \quad (1)$$

Les pôles de $\mathcal{H}(p)$ définissent les modes propres du système. Dans le cas d'un système à paramètres distribués, $\mathcal{H}(p)$ présente un nombre infini de pôles. Réduire un tel système consistera à établir une nouvelle matrice de transfert $H(p)$ ne présentant qu'un nombre fini de pôles choisis de manière à approcher au mieux $\mathcal{H}(p)$ [10, 11]. Il est certain que les critères utilisés pour cette optimisation dépendent du problème envisagé. En particulier la connaissance du type d'entrées usuelles auxquelles est soumis le système ainsi que du domaine de fréquence dans lequel nous utilisons la sortie influent fortement sur leur définition.

D'autre part, le choix a priori de la dimension N du système différentiel ordinaire approché résultera d'un compromis: plus N est faible, plus la description du système est, en général, erronée; mais plus N est faible, moins la résolution du problème de commande est difficile.

Une fois la matrice de transfert $H(p)$ établie, il reste, pour être à même de résoudre un problème de commande optimale sur le système réduit caractérisé par $H(p)$, une deuxième étape à franchir: il faut établir une réalisation, de préférence minimale [12], du système. Il s'agit d'associer à $H(p)$ un système différentiel du type

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = AT(t) + BU(t) \\ \Phi(t) = CT(t) + DU(t) \end{cases} \quad (2)$$

où $T(t)$ est le vecteur d'état et $\dot{T}(t)$ sa dérivée temporelle. A, B, C, D sont des matrices caractérisant le système. Une réalisation de la relation d'entrée-sortie (1) est dite minimale si la dimension du vecteur $T(t)$ est la plus faible possible.

Notre intérêt spécifique dans cet article est l'étab-

NOMENCLATURE

a	diffusivité	\bar{R}_i	matrice des résidus correspondant au pôle p_i dans $H(p)$.
A	rapport du maximum de $R_e(\tau)$ au maximum de $\mathcal{H}_e(\tau)$.	$\mathcal{H}_e(\tau), \mathcal{H}_i(\tau)$	réponses percussionnelles du filtre défini par $\mathcal{H}(p)$.
$C(C^*)$	capacités du filtre passe-bas équivalent, dimensionnées (adimensionnées).	\bar{S}_i	matrice des résidus correspondant au pôle p_i dans $K(p)$.
\mathcal{F}	rapport du retard de la réponse percussionnelle approchée à celui de la réponse percussionnelle exacte.	t	temps dimensionné
$H(p)$	matrice de transfert 2×2 rationnelle approchée	T	température
$H_i(p), H_e(p)$	éléments de $H(p)$	$U(t)$	vecteur d'entrée adimensionné du système
$\mathcal{H}(p)$	matrice de transfert 2×2 non rationnelle caractérisant le système	$U_i(t), U_e(t)$	composantes de $U(t)$
$\mathcal{H}_i(p), \mathcal{H}_e(p)$	éléments de $\mathcal{H}(p)$	$\hat{U}(p)$	transformée de la Laplace de $U(t)$
\bar{k}	conductivité de la paroi	x	coordonnée d'espace, dimensionnée
$K(p)$	matrice de transfert 1×2 rationnelle approchée	X	$= x/l$
l	épaisseur de la paroi	z_q	zéros de $\mathcal{H}(p)$.
N	dimension de la représentation d'état du système	Symbols grecs	
\mathcal{N}	distance entre les maxima de $R_e(\tau)$ et $\mathcal{H}_e(\tau)$.	$\varphi_i(t), \varphi_e(t)$	flux de chaleur sur les faces i et e .
\tilde{p}_k	pôles de $\mathcal{H}(p)$.	$\Phi(t)$	vecteur de sortie adimensionné du système
$r, r_0(r^*, r_0^*)$	résistances du filtre passe-bas équivalent, dimensionnées (adimensionnées).	$\Phi_i(t), \Phi_e(t)$	composantes de $\Phi(t)$; $\Phi_{i(e)}(t) = l\varphi_{i(e)}(t)/\bar{k}\Delta T$
$Re(p)$	partie réelle de p .	$\hat{\Phi}(p)$	transformée de la Laplace du $\Phi(t)$
$R_e(\tau), R_i(\tau)$	réponses percussionnelles du filtre défini par $H(p)$.	$\hat{\Phi}_{(i)}(p)$	approximation de $\hat{\Phi}_{(i)}(p)$.
		θ	température adimensionnée, $T/\Delta T$
		ΔT	composante de fréquence nulle de l'écart en température entre les deux faces de la paroi
		τ	temps adimensionné, atl^{-2}

lissement de représentations d'état minimale à un nombre très faible de dimensions: Nous limitons a priori N à quelques unités. Les méthodes de troncature et discrétisation appliquées directement aux équations d'état et usuelles en thermique [1, 13–15] ne sont pas adaptées; par contre, une description entrée-sortie du système à réduire permet de mettre en évidence les sorties qui sont importantes pour le problème de commande optimale envisagé et d'optimiser précisément ces sorties au détriment d'autres grandeurs qui n'interviendront pas directement dans le problème de commande optimale. Nous avons déjà abordé ce problème dans un article précédent [16]: la dimension de la matrice de transfert d'une paroi thermique linéaire monodimensionnelle avec conditions aux limites mixtes y est réduite à quelques unités par agrégation linéaire (conservation des premiers pôle et zéros) ou par développement limité au voisinage de $p = 0$. Ces deux méthodes, valables à basse fréquence, avaient été choisies compte tenu des applications qui nous intéressent à savoir en particulier le bâtiment soumis aux perturbations climatiques fluctuantes [17].

Notre propos ici est de voir dans quelle mesure on peut améliorer le système réduit, à nombre de

dimensions N donné, en optimisant le choix des pôles et des zéros du système réduit, plutôt que de les déduire par les méthodes simples ci-dessus. Nous considérons le cas d'une paroi thermique monodimensionnelle linéaire avec les températures de surface en entrée et les flux en sortie (Section 2). Le premier problème consiste à déterminer, suivant la dimension du vecteur sortie du système, le nombre de degrés de liberté dont on dispose pour l'optimisation, à N , nombre de dimension de la réalisation minimale correspondante, donné a priori et pour une forme a priori de la matrice de transfert approchée (Section 3); en effet on peut envisager certains systèmes où les flux sur les deux faces de la paroi sont à considérer (sortie à deux dimensions) et d'autres systèmes où seul le flux sur une face est à prendre en compte (sortie à une dimension). On étudiera d'abord le cas où $N = 2$ (Section 4) puis le cas où N est quelconque (Section 5). Ensuite, ce problème du nombre de degrés de liberté de l'optimisation étant résolu, on définira les critères d'optimisation qui nous amèneront à optimiser les pôles en premier lieu (Section 6) puis les zéros, s'il y a lieu, c'est à dire si le nombre de degrés de liberté est suffisant pour que ces derniers ne soient pas déterminés par les pôles (Section 7).

2. RAPPEL SUR LA MATRICE DE TRANSFERT D'UNE PAROI THERMIQUE MONODIMENSIONNELLE

On considère une paroi thermique linéaire monodimensionnelle d'épaisseur l , soumise à des conditions aux limites de Dirichlet. Les équations d'état de ce système sont

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta(X, \tau)}{\partial X^2} &= \frac{\partial \theta(X, \tau)}{\partial \tau} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\theta(0, \tau) = U_i(\tau), \quad \theta(1, \tau) = U_e(\tau) \quad (4)$$

On sait que, si $\theta(X, \tau)$ vérifie (3) et (4) pour $\tau = 0$, le système linéaire défini par les équations d'état (3), (4) peut être décrit par la relation entrée-sortie suivante

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_i \\ \hat{\Phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\mathcal{H}_i & +\mathcal{H}_e \\ +\mathcal{H}_e & +\mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_i \\ \hat{U}_e \end{bmatrix} = \mathcal{H}(p) \begin{bmatrix} \hat{U}_i \\ \hat{U}_e \end{bmatrix}, \quad (5)$$

où \hat{U}_i et \hat{U}_e sont les transformées de Laplace monolatérales (TL) définies par :

$$\hat{U}_{(e)}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} (U_i(\tau) - U_i(0)) d\tau. \quad (6)$$

Les TL $\hat{\Phi}_i(p)$ et $\hat{\Phi}_e(p)$ sont définies de la même manière à partir des flux de chaleur adimensionnés sur les deux faces i et e de la paroi, $\Phi_i(\tau)$ et $\Phi_e(\tau)$ (Fig. 2). Les valeurs de $\Phi_i(\tau)$ et $\Phi_e(\tau)$ pour $\tau = 0$ sont consistantes avec $\theta(X, 0)$. On a [16-18] :

$$\mathcal{H}_e(p) = \sqrt{p/\sinh \sqrt{p}} \quad (7)$$

$$\mathcal{H}_i(p) = -\sqrt{p/\tanh \sqrt{p}} \quad (8)$$

Soient \tilde{p}_s ($s \in N$) les pôles de $\mathcal{H}_e(p)$ et $\mathcal{H}_i(p)$, et z_q ($q \in N$) les zéros de $\mathcal{H}_i(p)$; remarquons, car ce sera utile dans la suite lors du choix des pôles et des zéros de la matrice réduite, que :

$$0 > z_1 > p_1 > z_2 > p_2 > z_3 \cdots > p_n > z_{n+1} > p_{n+1} > \cdots \quad (9)$$

3. REDUCTIONS A UN SYSTEME DIFFERENTIEL DE FAIBLE DIMENSION

On s'intéressera ici à deux problèmes de réduction distincts. Le premier consiste à approcher les relations (5), (7), par une matrice rationnelle $H(p)$ telle que le vecteur sortie $\hat{\Phi}(p)$, à deux dimensions, qui est associé par $H(p)$ à une entrée quelconque $\hat{U}(p)$ appartenant à l'ensemble des entrées possibles (vecteur à deux

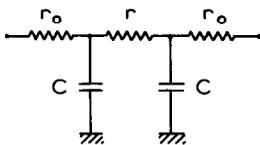


FIG. 1. Définitions des résistances et capacités d'un filtre passe-bas symétrique d'ordre 2.

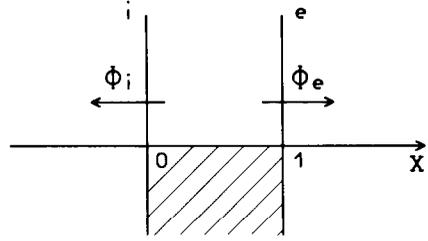


FIG. 2. Paroi thermique monodimensionnelle étudiée.

dimensions), soit "aussi proche que possible" de $\hat{\Phi}(p)$ donné par (5) et (7). On a $\hat{\Phi}(p) = H(p) \hat{U}(p)$, soit encore

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_i(p) \\ \hat{\Phi}_e(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i & H_e \\ H_e & H_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_i \\ \hat{U}_e \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Le deuxième problème de réduction ne considère qu'une sortie à une dimension, le flux sur une des faces. Dans ce cas on cherchera donc à n'approximer que $\hat{\Phi}_i$, donné par la première ligne de (5) à l'aide de :

$$\hat{\Phi}_i = [+H_i, +H_e] \begin{bmatrix} \hat{U}_i \\ \hat{U}_e \end{bmatrix} = K(p) \hat{U}, \quad (12)$$

sans imposer la symétrie présente dans (11). En effet suivant le problème pratique envisagé, le poids relatifs de l'intérêt porté aux deux composantes de la sortie $\hat{\Phi}_i(t)$ et $\hat{\Phi}_e(t)$ peut varier. Par exemple, dans le cas d'un système de stockage par chaleur sensible échangeant sur ces deux faces, une approximation satisfaisante des deux sorties $\hat{\Phi}_i(t)$ et $\hat{\Phi}_e(t)$ sera recherchée. Mais si la charge et la décharge ont lieu sur la même face et que l'autre face est isolée, il est clair que seule l'approximation sur $\hat{\Phi}_i(t)$ est à optimiser.

Nous centrerons, pour cette étude, notre intérêt sur les systèmes réduits à deux pôles dont les fonctions de transfert intervenant dans (11) ou (12) sont de la forme :

$$H_e = \frac{p_1 p_2}{(p - p_1)(p - p_2)}; \quad H_i = \frac{\alpha p^2 + \beta p - p_1 p_2}{(p - p_1)(p - p_2)}. \quad (13)$$

Les pôles p_1 et p_2 et les paramètres α et β , qui déterminent les zéros z_1 et z_2 de H_i , sont les quatre inconnues à définir. La forme donnée a priori à H_e et H_i dans (13) a été choisie par référence aux cas classiques où \mathcal{H}_e et \mathcal{H}_i sont réduites par agrégation linéaire ou développement limité [16].

La stabilité du système réduit impose :

$$\text{Re}(p_1) < 0, \quad \text{Re}(p_2) < 0.$$

D'autre part, le fait que $R_e(\tau)$ la TL inverse de $H_e(p)$, soit réelle entraîne que :

$$\text{soit } p_1, p_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{soit } p_1 = p_2^*.$$

Nous réduisons le domaine des valeurs possibles de p_1 et p_2 à \mathbb{R}^- car le cas où $p_1 = p_2^*$ introduit des oscillations de $R_e(\tau)$ et $R_i(\tau)$ qui n'existent pas dans les réponses percussives originales, pour lesquelles $\tilde{p}_s \in \mathbb{R}^-$.

Concernant les zéros, le fait que $R_i(\tau)$, la TL inverse de

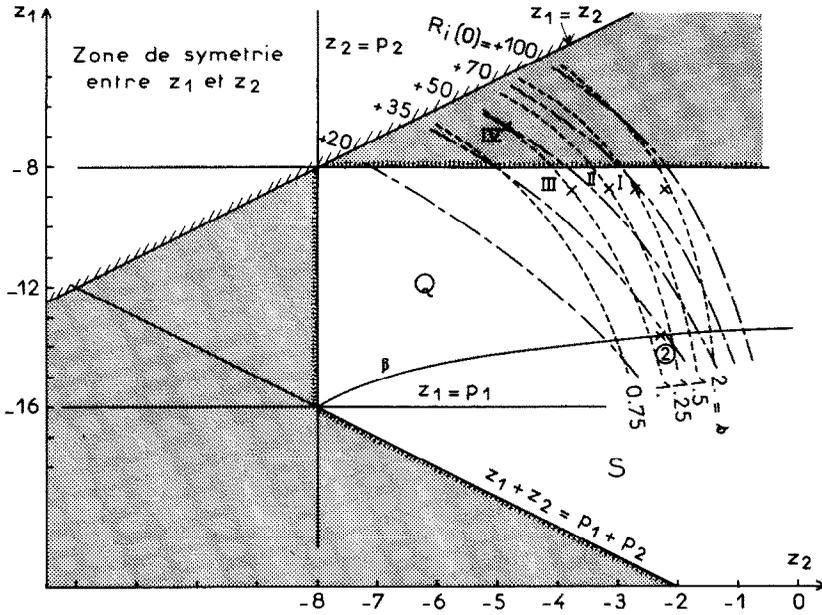


FIG. 3. Domaine de variation autorisé pour $z_1 < z_2$: les zones teintées en gris sont interdites et la symétrie $z_1 > z_2$ n'est pas considérée. Les zones autorisées sont Q et S de frontière commune $z_1 = p_1$. Dans le cas particulier de la figure, $p_1 = -16$, $p_2 = -8$. ——— courbes equi $R_i(0)$; - - - - courbes equi σ . Courbe $\beta =$ égalité des coefficients de $e^{p_1 t}$ et $e^{p_2 t}$ (les pôles et les zéros forment une division harmonique). Point $\textcircled{2} =$ filtre passe-bas symétrique ($p_1 = -16$, $p_2 = -8$).

$H_i(p)$, soit réelle entraîne que si $p_1, p_2 \in R^-$:
 soit $z_1, z_2 \in R$, soit $z_1 = z_2^*$.

On montre que les valeurs des deux résidus associés à p_1 et p_2 dans l'expression de $R_i(\tau)$ varient strictement dans les mêmes domaines que l'on considère $z_1, z_2 \in R$ ou $z_1 = z_2^*$. On se limitera donc, comme dans la matrice de transfert originale, à $z_1, z_2 \in R$.

De plus, pour t strictement positif, on s'imposera $R_i(t)$ réelle positive comme dans le filtre thermique original. Ceci entraîne que nécessairement

- soit $p_1 < z_1 < p_2 < z_2$; zone Q
- soit $\left. \begin{matrix} z_1 < p_1 < p_2 < z_2 \\ z_1 + z_2 > p_1 + p_2 \end{matrix} \right\}$ zone S.

Nous limiterons donc finalement le domaine de variation de z_1 et z_2 à ces deux zones, Q et S, indiquées sur la Fig. 3. Ceci permettra en particulier de situer l'approximation par agrégation linéaire qui d'après (8) et (9) appartient la zone Q. Par contre ceci exclut les développements limités qui introduisent des zéros complexes conjugués.

4. REALISATION SYMETRIQUE A DEUX POLES ET DEUX DIMENSIONS D'UNE PAROI THERMIQUE MONODIMENSIONNELLE

Nous montrons dans ce paragraphe que pour que la réalisation minimale de H_e et H_i définies par (13) dans le cas d'un système symétrique (11) ne présente que deux dimensions, il faut que les zéros de H_i soient définis à

partir des pôles par des expressions que nous précisons. Nous montrons de plus que si ces expressions sont vérifiées et si les pôles sont réels et négatifs, la réalisation minimale de H_e et H_i est équivalente à un filtre passe-bas symétrique tel que défini sur la Fig. 1.

Faisons donc l'hypothèse qu'il existe, associée à (11), (13), une représentation d'état à deux dimensions de la forme :

$$\left. \begin{matrix} \dot{\theta} = A\theta + BU \\ \Phi = C\theta + DU, \end{matrix} \right\} \quad (14)$$

où le vecteur θ est le vecteur d'état à deux dimensions ; A, B, C, D sont des matrices carrées 2×2 .

Compte tenu de l'hypothèse sur H_e et H_i faite en (13), les valeurs propres de A sont p_1 et p_2 . Il existe donc une matrice Q ($\|Q\| = 1$) telle que

$$QAQ^{-1} = \mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Par transformation de Laplace de (14), élimination de θ et utilisation de (15), on obtient, en posant $CQ^{-1} = \mathcal{C}$, $QB = \mathcal{B}$,

$$\Phi = (\mathcal{C}(pI - \mathcal{P})^{-1} \mathcal{B} + D) \hat{U}. \quad (16)$$

Pour que (14) soit une représentation de (11) (13), il faut que

$$\mathcal{C}(pI - \mathcal{P})^{-1} \mathcal{B} + D \equiv \begin{pmatrix} H_i & H_e \\ H_e & H_i \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Soulignons que tout changement de base, normé ou

non, pour le vecteur d'état θ ,

$$\theta \rightarrow \theta^* = W\theta, \quad (18)$$

laisse invariante la relation (17) et donc que (17) définit (14) à un changement de base près.

Posons :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

L'identification de la première ligne de (17) seule, (en l'absence de symétrie) entraîne :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= d_1 \\ c_2 b_3 &= (\beta + \alpha p_2 - p_1) p_2 / (p_2 - p_1) \\ c_1 b_1 &= (\beta + \alpha p_1 - p_2) p_1 / (p_1 - p_2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} d_2 &= 0 \\ c_1 b_2 &= -c_2 b_4 = p_1 p_2 / (p_1 - p_2) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

On voit que ces six relations permettent, pour α, β, p_1, p_2 donnés quelconques, de définir les produits $c_1 b_1, c_1 b_2, c_2 b_3, c_2 b_4$ ainsi que d_1 et d_2 . Donc on peut effectivement approximer la relation entrée-sortie non symétrique (S') par des fonctions de transfert de la forme (13) quelconques, et le système différentiel correspondant de dimensions minimales est d'ordre 2.

Si on impose de plus que les relations de symétrie (identification de la deuxième ligne de (17)) soient vérifiées, l'examen des équations montre qu'il n'existe une représentation d'ordre 2 que si les données vérifient :

$$\alpha = \frac{2p_1}{p_2 - p_1}, \quad \beta = \frac{-2p_1^2}{p_2 - p_1}. \quad (24, 25)$$

Si on introduit les zéros z_1 et z_2 de H_1 , (24) et (25) s'écrivent encore :

$$\left. \begin{aligned} z_1 \\ z_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ p_1 \pm [(p_1 - p_2)^2 + p_2^2]^{1/2} \right\}. \quad (26)$$

On voit donc que si l'on cherche une réalisation minimale d'ordre deux associée aux relations (11), (13), la symétrie du système impose de définir les zéros de H_1 à partir des pôles du système par la relation (26).

De plus, la symétrie entraîne que :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (27)$$

et que

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 \\ b_1 Z & b_1 Z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \frac{2p_1 p_2}{p_2 - p_1} \mathcal{B}^{-1}. \quad (28)$$

Par changement de base (18) pour le vecteur d'état θ ,

on peut écrire (14) dans la base où \mathcal{B} et \mathcal{C} sont diagonales :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}^* &= \begin{bmatrix} \frac{p_1 + p_2}{2} & \frac{p_2 - p_1}{2} \\ \frac{p_2 - p_1}{2} & \frac{p_1 + p_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_2 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_e \end{bmatrix} \\ \Phi &= \begin{bmatrix} -2p_1 & 0 \\ p_2 - p_1 & -2p_1 \\ 0 & p_2 - p_1 \end{bmatrix} \theta^* - \begin{bmatrix} -2p_1 & 0 \\ p_2 - p_1 & -2p_1 \\ 0 & p_2 - p_1 \end{bmatrix} U. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Si p_1 et p_2 sont réels négatifs et si $p_1 < p_2$, on peut poser

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\left(\frac{h_{01} + 2h_{12}}{C}\right) \frac{l^2}{a} \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{h_{01}}{C} \frac{l^2}{a} \\ h_{01} &> 0, \quad h_{12} > 0, \quad C > 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Les équations (29), (30) sont les équations adimensionnées d'un filtre passe-bas symétrique (Fig. 1) où :

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= h_{01}^{-1} \\ r &= h_{12}^{-1} \end{aligned} \right\}$$

et dont la résistance et la capacité totales sont respectivement les mêmes que pour la paroi thermique initiale.

On a donc montré que pour qu'il existe une équation d'état à deux dimensions associée à la relation entrée-sortie symétrique (11), (13), il faut que les zéros soient fonctions des pôles suivant la relation (26) et que, de plus si $p_1 < p_2 < 0$, cette équation d'état est celle d'un filtre passe-bas symétrique (Fig. 1). Les deux seules inconnues définissant ce filtre dans ce cas sont les pôles p_1 et p_2 sur lesquels portera donc l'optimisation. Notons que les quatre grandeurs (p_1, p_2, z_1, z_2) , reliées par (26) vérifient l'inégalité caractéristique de la zone Q de la Fig. 3 et, qui plus est, constituent une division harmonique.

5. REALISATIONS MINIMALES DES MATRICES DE TRANSFERT A k POLES. $H(p)$ ET $K(p)$

Dans ce paragraphe, nous traitons maintenant le problème de la réalisation minimale des matrices $H(p)$, définie par (11), (13) ou $K(p)$, définie par (12) (13) par une méthode qui permet l'extension de nos résultats à des fonctions de transfert à k pôles et k zéros :

$$H_c^k = \frac{\prod_{l=1}^k (-p_l)}{\prod_{l=1}^k (p - p_l)}; \quad H_1^k = -\frac{\prod_{q=1}^k (p - z_q)}{\prod_{l=1}^k (p - p_l)} \prod_{l=1}^k \frac{p_l}{z_l}. \quad (31)$$

Développons les matrices de transfert correspondantes $H^k(p)$ en éléments simples $R_i(i = 1, \dots, k)$ et

$K^k(p)$ en éléments simples $\bar{S}_i (i = 1, \dots, k)$. Les \bar{R}_i sont des matrices 2×2 et les \bar{S}_i des matrices 1×2 .

On sait [19] qu'en général si une matrice $n \times m, \bar{R}_i$, est de rang r_i , on peut la factoriser de la manière suivante :

$$\bar{R}_i = C_i B_i,$$

où C_i est une matrice $n \times r_i$ et B_i une matrice $r_i \times m$. De plus on peut montrer [19, 20] que si les matrices \bar{R}_i sont les résidus d'une matrice de transfert $H(p)$, à k pôles, une réalisation minimale de $H(p)$, de la forme (14) est obtenue en posant :

$$\left. \begin{aligned} C &= [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_k], \text{ matrice } n \times \sum_{i=1}^k r_i \\ B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix}, \text{ matrice } \sum_{i=1}^k r_i \times m \\ A &= \text{matrice de dimension } \left(\sum_{i=1}^k r_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^k r_i \right). \end{aligned} \right\} (32)$$

Dans le cas (11), (13) où $n = 2, m = 2$ les matrices \bar{R}_i sont en général de rang 2 à moins qu'une relation entre pôles et zéros n'annule les déterminants $\|\bar{R}_i\|$ des résidus. Par conséquent C_i et B_i sont également de rang 2 et C et B donc des matrices $2 \times 2k$ et $2k \times 2$ respectivement. A sera alors une matrice $2k \times 2k$. Donc

si l'on cherche à réduire le système (5) sous une forme symétrique quelconque à k pôles et k zéros du même type que (11), (13) le système d'équations différentielles correspondant est d'ordre $2k$.

Par contre, si on ne s'intéresse qu'à une seule composante de la sortie de la paroi thermique et qu'on cherche donc à réaliser (12), (13) le rang des résidus \bar{S}_i est évidemment 1 et il en est de même des matrices C_i et B_i de factorisation. Par conséquent C est une matrice $1 \times k$ ainsi que B^T . A est une matrice $k \times k$. On a donc dans ce cas, sans aucune hypothèse a priori sur les pôles et les zéros du système réduit, obtenu une réalisation minimale d'ordre k .

Dans le cas symétrique, la réduction du système à l'ordre k impose les relations a priori

$$\|\bar{R}_1\| = 0, \quad \|\bar{R}_2\| = 0. \quad (33)$$

On vérifie pour $k = 2$ que la résolution des équations (33) conduit à la même relation (26) entre pôles et zéros que celle obtenue au Section 4.

Toujours pour $k = 2$, cas auquel nous nous limitons dans la suite, ces résultats nous permettent, pour une réalisation minimale d'ordre 2, de hiérarchiser l'optimisation des pôles et des zéros de $H(p)$ et $K(p)$. En effet, l'optimisation des pôles entraîne celle de $H_e(p)$ dans $H(p)$ et $K(p)$, et de $H_i(p)$ dans $H(p)$. Si de plus on optimise les zéros au lieu de leur imposer la relation (26), on optimise $H_i(p)$ dans $K(p)$.

6. OPTIMISATION DE LA LOCALISATION DES POLES DU SYSTEME REDUIT

Pour l'optimisation de H_e comme celle de H_i nous utilisons, comme critère, des distances entre leurs TL inverses $R_e(\tau)$ ou $R_i(\tau)$ et les réponses percussionnelles à approximer $\mathcal{R}_e(\tau)$ ou $\mathcal{R}_i(\tau)$ TL inverses de \mathcal{H}_e ou \mathcal{H}_i , pour des temps τ adimensionnés faibles :

$$\tau \lesssim 0.2. \quad (34)$$

Nous nous limitons aux temps faibles parce que $\mathcal{R}_e(\tau)$ et $\mathcal{R}_i(\tau)$ tendent vers zéro pour les temps élevés d'une part et que d'autre part nous avons déjà assuré par la normalisation des équations (13) que

$$\int_0^\infty R_e(\tau) d\tau = - \int_0^\infty R_i(\tau) d\tau = 1(H_e(0) = -H_i(0))$$

de même que d'après (7)

$$\int_0^\infty \mathcal{R}_e(\tau) d\tau = - \int_0^\infty \mathcal{R}_i(\tau) d\tau = 1.$$

(Remarquons que $R_i(t)$ et $\mathcal{R}_i(t)$, positives pour t strictement positif, présentent des singularités négatives en $t = 0$, ce qui explique les relations intégrales ci dessus).

$\mathcal{R}_e(\tau)$ a l'allure montrée sur la Fig. 4 et présente un maximum

$$M_e(\tau_M) \simeq 5,9$$

pour $\tau_M \simeq 0,09$.

$R_e(\tau)$ présente par définition [cf. (13)] un maximum

$$A_e(\tau_A) = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 \tau_A} - e^{p_2 \tau_A})$$

pour $\tau_A = \frac{1}{p_1 - p_2} \log \frac{p_2}{p_1}$

Une bonne approximation de $\mathcal{R}_e(\tau)$ à temps faibles consistera à bien situer le maximum. On pourra s'attacher

- soit à la position de l'abscisse: critère $\tau_A/\tau_M = \mathcal{F}$ voisin de 1
- soit à la valeur de l'ordonnée: critère $A_e(\tau_A)/M_e(\tau_M) = A$ voisin de 1

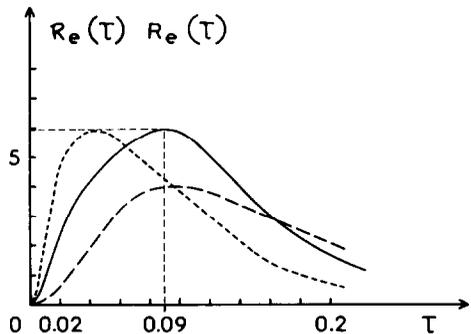


FIG. 4. Allure des courbes $\mathcal{R}_e(\tau)$ (traits pleins) et $R_e(\tau)$ (traits discontinus).

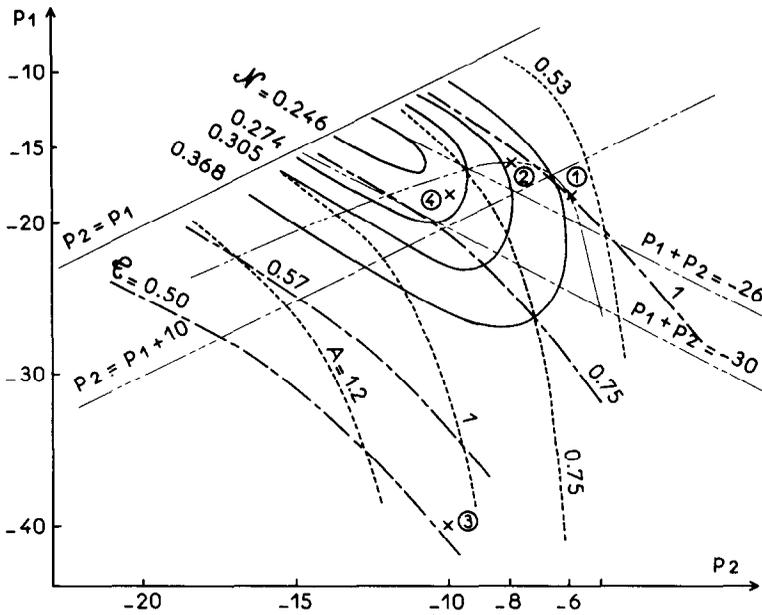


FIG. 5. Optimisation de $p_1 < p_2 < 0$: comportement de $R_e(\tau)$. Courbes de niveau: - - - - A; \mathcal{F} ; — \mathcal{N} ; - - - - $C^* = 0,5$. Points: ① passe-bas symétrique $r_0^* = r^* = 1/3$, $C^* = 1/2$; ② passe-bas symétrique $r_0^* = \frac{1}{2}r^* = \frac{1}{4}$, $C^* = 1/2$; ③ passe-bas symétrique obtenu par agrégation linéaire; ④ zone optimale ($p_1 = -18$, $p_2 = -10$).

● soit à la distance entre les deux maxima :

$$\text{critère } \mathcal{N} = \sqrt{(1-\mathcal{F})^2 + (1-A)^2} \text{ minimum.}$$

On voit sur la Fig. 5 que lorsqu'on augmente \mathcal{F} jusqu'à une valeur voisine de 1 c'est au détriment de A (pour $\mathcal{F} \cong 1$, $0,5 \leq A \leq 0,7$) et réciproquement (pour $A \cong 1$, $0,55 \leq \mathcal{F} \leq 0,7$). Le paramètre déterminant qui permet de privilégier A ou \mathcal{F} est $(p_1 + p_2)$ comme on le voit sur la Fig. 5. L'allure de $R_e(\tau)$ pour ces cas extrêmes est donnée sur la Fig. 4. Ils correspondent à des normes du même ordre non minimisées. On constate (Fig. 5) qu'on peut réduire cette dernière en se situant entre ces deux cas extrêmes et en diminuant $(p_2 - p_1)$. La Fig. 5 montre qu'en ce qui concerne $\mathcal{R}_e(\tau)$ la région optimale se situe grosso-modo entre les bornes suivantes

$$\begin{aligned} -34 \lesssim p_1 + p_2 \lesssim -24 \\ 0 \lesssim p_2 - p_1 \lesssim 10. \end{aligned} \tag{35}$$

Notons que l'on n'a pas intérêt pour des raisons numériques à s'approcher trop près de la limite $p_2 = p_1$ (l'égalité est exclue dans la position du problème) car on tend à décrire $R_e(\tau)$ par la différence de deux termes voisins très grands.

Quelques points particulièrement intéressants ont été indiqués sur la Fig. 5. Les points ① et ② correspondent aux schémas usuels de réduction passe-bas symétrique. En introduisant les résistances adimensionnées $r^* = r\tilde{k}/l$ et capacités adimensionnées $C^* = C \times a/kl$ on peut caractériser ces points par :

- ① $r_0^* = r^* = \frac{1}{3}$, $C^* = \frac{1}{2}$
- ② $r_0^* = \frac{1}{2}r^* = \frac{1}{4}$, $C^* = \frac{1}{2}$.

Ces deux points conservent la capacité du filtre à approximer, de même que (Fig. 5) l'ensemble des points vérifiant $C^* = \frac{1}{2}$, c'est à dire

$$C^* = \frac{2p_1}{p_2(p_2 - p_1)} = 0,5. \tag{36}$$

On voit que le point ② donne une meilleure approximation de $\mathcal{R}_e(\tau)$ que le point ①.

Le point ③, qui ne vérifie pas la propriété (36), correspond à l'approximation par agrégation linéaire (conservation des deux premiers pôles); il a de mauvaises performances en ce qui concerne \mathcal{N} et \mathcal{F} .

Pour préciser l'optimisation de p_1 et p_2 dans le cas symétrique, on doit maintenant examiner l'incidence de p_1 et p_2 sur $R_i(\tau)$. La courbe $\mathcal{R}_i(\tau)$ à approcher décroît très rapidement de $+\infty$ à $\sim 9,5$ lorsque τ croît de 0^+ à $0,1$. Une bonne approximation de $\mathcal{R}_i(\tau)$ à temps faible maximisera $R_i(0^+)$ et situera

$$\sigma = \frac{R_i(0, 1)}{9,5}$$

au voisinage de 1.

On voit sur la Fig. 6 que la région optimale définie pour $\mathcal{R}_e(\tau)$ doit se restreindre autour du point ④ pour satisfaire au mieux les critères sur $\mathcal{R}_i(\tau)$: ceci correspond à $p_1 \cong -8$, $p_2 \cong -10$. Le point ④ ($p_1 = -18$, $p_2 = -10$) est caractérisé par

$$C^* = 0,45 \text{ et } r^* = p_2/p_1 = 0,55.$$

Il est globalement meilleur que le point ② pour les temps faibles, sauf en ce qui concerne le critère $\mathcal{F} = 1$.

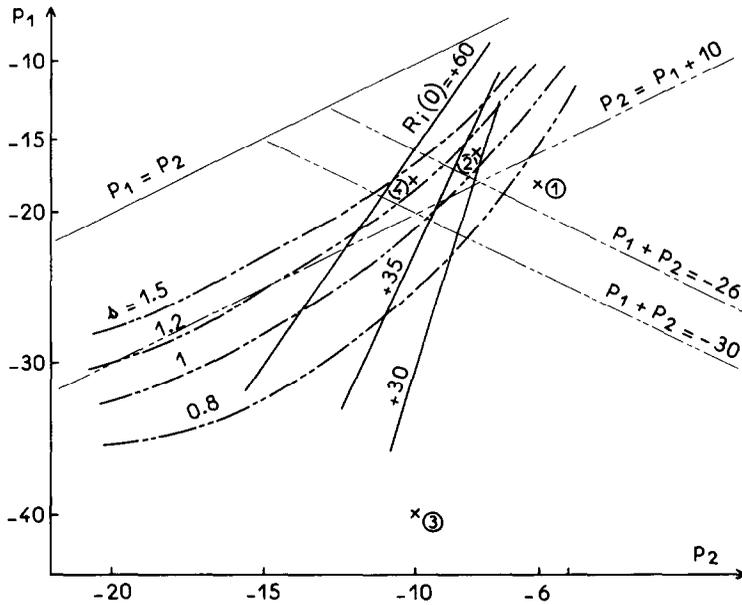


FIG. 6. Optimisation de $p_1 < p_2 < 0$: comportement de $R_i(\tau)$. Courbes: --- courbes equi δ ; — courbes equi $R_i(0)$. Points ①-④: voir Fig. 5.

7. OPTIMISATION DE LA POSITION DES ZEROS DANS LE CAS NON SYMETRIQUE

Nous allons maintenant considérer le cas non symétrique où les zéros ne sont pas reliés aux pôles par la relation (26) et où, à pôles et donc à H_e donnés, on peut optimiser H_i en jouant indépendamment sur les zéros.

On remarque que H_i est beaucoup plus sensible à la variation des zéros que des pôles, lorsque ceux-ci sont maintenus dans la région d'optimisation de H_e tandis que l'on fait varier z_1 et z_2 dans les zones Q et S autorisées. On a donc fixé ici $p_1 = -16, p_2 = -8$, ce qui correspond à l'approximation symétrique classique du

point ②, la différence des résultats avec le point ④ ($p_1 = -18, p_2 = -10$) étant faible en ce qui concerne les positions optimales de z_1 et z_2 .

On a utilisé pour l'optimisation de H_i les mêmes critères δ et $R_i(0^+)$ que dans le cas symétrique. On constate sur la Fig. 3 que pour

$$z_1 < z_2 < 0,$$

on a intérêt à augmenter z_1 jusqu'au voisinage de la limite $z_1 = p_2$, d'une part et que d'autre part, à z_1 donné, la décroissance de z_2 fait passer d'une approximation acceptable (point I) pour τ compris entre 0 et 0,1 à des approximation de moins et moins bonnes, surtout dans le domaine $0 < \tau < 0,05$ (points II et III) comme le

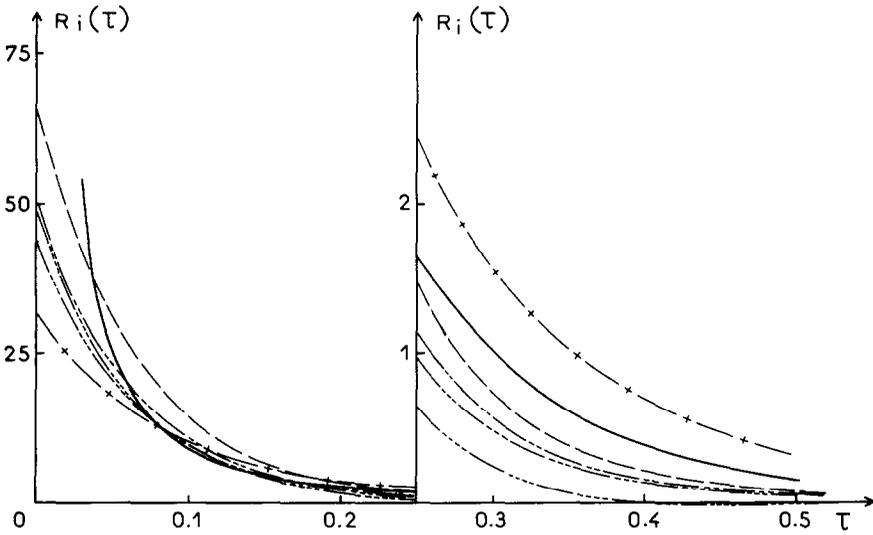


FIG. 7. $R_i(\tau)$ pour les points I-IV, ②: --- I; --- II; --- III; --- IV; - + - + - ②; — $R_i(\tau)$.

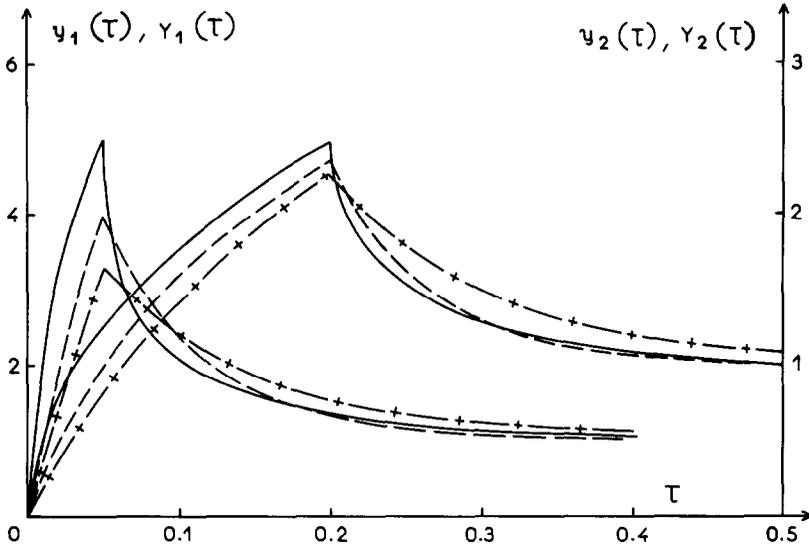


FIG. 8. Réponse à une entrée en créneau de largeur $\tau = 0,05$ et de hauteur $1/0,05$ (respectivement de largeur $\tau = 0,2$ et de hauteur $1/0,2$): $y_1(\tau)$, réponse de la paroi thermique — $Y_1(\tau)$, réponse des filtres approchés. — — — point I; - + - + - point 2.

montre la Fig. 7 :

- I $z_1 = -8,7 \quad z_2 = -2,75$
- II $z_1 = -8,7 \quad z_2 = -3,15$
- III $z_1 = -8,7 \quad z_2 = -3,80$

On donne également, sur la Fig. 7, $R_i(\tau)$ correspondant au filtre symétrique ② : on voit que pour les temps faibles

$$\tau \lesssim 0,05$$

le point I est une bien meilleure approximation que le filtre symétrique ②. Par contre pour $0,05 \lesssim \tau \lesssim 0,18$ le point ② donne une meilleure approximation. Pour τ grand, le point I est à nouveau nettement meilleur que le point ②. Ceci nous amène ici à confirmer nos critères sur $R_i(\tau)$ [σ et $R_i(0^+)$] par un critère intégral. Plus précisément nous avons comparé les réponses de la paroi réelle, du filtre à deux dimensions non symétrique représenté par le point I, et du filtre à deux dimensions symétrique représenté par le point ② pour deux entrées en créneau d'intégrale 1 et de largeur respectives $\tau = 0,05$ et $\tau = 0,2$. Les résultats montrés sur les courbes de la Fig. 8 confirment que le point I approxime le flux émis sur une face de la paroi thermique de manière beaucoup plus satisfaisante que le point ②.

8. CONCLUSION

Les résultats précédents mettent en évidence que les méthodes d'agrégation linéaire classiques sont assez mal adaptées à la réduction des systèmes thermiques à un nombre très faible de dimensions : ceci est surtout sensible sur H_e qui décrit la transmission de la chaleur à travers la paroi thermique.

Ces résultats montrent de plus que dans le cas d'une approximation symétrique concernant les deux

composantes de la sortie, l'approximation classique issue d'un schéma de discrétisation réduit à deux noeuds est relativement bonne bien qu'on puisse l'améliorer en jouant légèrement sur les résistances et les capacités du filtre passe-bas symétrique :

$$C^* = 0,45 \text{ au lieu de } 0,50$$

$$r^* = 0,55 \text{ au lieu de } 0,50.$$

C'est dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'à une seule composante du flux de sortie (flux sur une seule face) que les gains obtenus par une optimisation sont les plus considérables ; on peut en effet envisager de suivre $R_i(\tau)$ aux temps faibles de manière beaucoup plus précise que dans le cas symétrique en situant les zéros et les pôles approximativement de la manière suivante :

$$p_1 = -16, \quad z_1 = -8,7, \quad p_2 = -8, \quad z_2 = -2,75.$$

Ces résultats peuvent s'étendre à d'autres conditions aux limites, c'est à dire à d'autres variables d'entrée (températures extérieures ou flux par exemple) et éventuellement d'autres variables de sorties : on doit à nouveau procéder à une optimisation semblable à celle que nous avons présentée ici pour ces différents cas.

Dans le prolongement de ce travail, nous envisageons l'application de ces méthodes d'optimisation avec perte de symétrie pour des systèmes plus complexes tels que par exemple une pièce d'habitat décrite par un ensemble de parois couplées linéairement.

REFERENCES

1. A. C. Robinson, A survey of optimal control of distributed parameter systems, *Automatica* 7, 371-388 (1971) (article de revue).
2. Voir par exemple : J. L. Lions *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1968).

3. F. Flandoli, Riccati equation arising in a boundary control problem with distributed parameter, *SIAM J. Control Optimiz.* **22**, 76–86 (1984).
4. H. T. Banks and K. Kunisch, The linear regulator problem for parabolic systems, *SIAM J. Control Optimiz.* **22**, 805–816 (1984).
5. A. Friedman, Non-linear optimal control problems for parabolic equations, *SIAM J. Control Optimiz.* **22**, 805–816 (1984).
6. E. E. Fisher, An application of the quadratic penalty function criterion to the determination of a linear control for a flexible vehicle *AIAA Jl* **3**, 1262–1267 (1965).
7. R. E. Smith, E. L. Lum and T. G. Yamamoto, Application of linear optimal theory to control of flexible aircraft ride qualities, AFFDL-TR-67-136, USAF Flight Dynamics Laboratory, WPAFB, OH (1968).
8. H. C. Khatri and R. E. Goodson, Optimal control of systems with distributed parameters, *Trans Am. Soc. mech Engrs, J. bas. Engng* **88**, 337–342 (1966).
9. R. C. Kolb and D. A. Pierre, Average integral-square error and an approximation to optimal control of distributed parameter systems, *Proc. 1966 Joint Automatic Control Conference*, Seattle, WA (1966).
10. La réduction des Modèles, journée d'étude AFCET (15 Mai 1984).
11. G. Michailesco, J. M. Siret et P. Bertrand, Modélisation de grands systèmes par agregation, *RAIRO Automatique/ Systems analysis and Control*, **13**, 159–170 (1979).
12. J. C. Gille et M. Clique, *La représentation d'état pour l'étude des systèmes dynamiques*, Chap. 5. Eyrolles, Paris (1975).
13. J. I. Ramos, A review of some numerical methods for reaction-diffusion equations. In *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. XXV. Elsevier, North-Holland, Amsterdam (1983).
14. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh, The theory of splines and their applications. In *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 38. Academic Press, New York (1967).
15. A. R. Aziz, *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Application to Partial Differential Equations*. Academic Press, New York (1972).
16. C. Bénard, E. Boileau et B. Guerrier, Comparaison de différentes approximations des fonctions de transfert d'une paroi thermique, *Rev. gén. Therm.* **257**, 391–404 (1983).
17. B. Guerrier, Modélisation stochastique appliquée à l'étude des entrées-sorties de systèmes thermiques : cas des composants linéaires de l'habitat passif. Thèse de Docteur Ingénieur Université de Paris (Janvier 81).
18. M. S. Carslow et J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. Oxford University Press, Oxford (1959).
19. R. Boudarel, J. Delmas et P. Guichet, *Commande optimale des processus*, Tome 1, p. 283. Dunod, Paris (1967).
20. R. Boudarel, J. Delmas et P. Guichet, *Commande optimale des processus*, Tome 1, p. 53. Dunod, Paris (1967).

OPTIMIZATION OF THE REDUCED REPRESENTATION OF A THERMAL WALL

Abstract—The description of a linear thermal wall by a very low order set of ordinary differential equations is optimized with a view to optimal control of thermal systems. The optimization problem deals with the reduced transfer matrix corresponding to inputs and outputs of interest, the optimal reduced state representation being deduced from the transfer matrix. For a given number of eigenmodes of the reduced system, the dimension of the minimum state representation is shown to increase with the number of considered outputs. A restricted class of reduced transfer matrices is defined which allows the dimension of the state representation of a multioutput system to be equal to the number of eigenmodes.

OPTIMIERUNG DER REDUZIERTEN DARSTELLUNG EINER THERMISCHEN WAND

Zusammenfassung—Die Beschreibung einer linearen thermischen Wand mit einem Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen von sehr niedriger Ordnung wird im Hinblick auf eine optimale Regelung des thermischen Systems optimiert. Das Optimierungsproblem befaßt sich mit der reduzierten Übertragungsmatrix entsprechend den interessierenden Eingangs- und Ausgangsgrößen. Aus der Übertragungsmatrix wird der optimale reduzierte Zustand abgeleitet. Für eine vorgegebene Anzahl von Eigenschwingungen des reduzierten Systems zeigt sich, daß die Dimension der Darstellung minimaler Zustände mit der Zahl der betrachteten Ausgangsgrößen zunimmt. Es wird eine beschränkte Klasse reduzierter Übertragungs-Matrizen definiert, bei welchen es möglich ist, daß die Dimension der Zustands-Darstellung eines Systems mit vielen Ausgangsgrößen gleich der Anzahl von Eigenschwingungen ist.

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕДУЦИРОВАННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВОЙ СТЕНКИ

Аннотация—Описание линейной тепловой стенки с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений невысокого порядка рассматривается с позиций оптимального управления тепловыми системами. Проблема оптимизации связана с редукцией передаточной матрицы, соответствующей входам и выходам, причем оптимальное представление получается из передаточной матрицы. Показано, что для заданного числа собственных мод редуцированной системы размерность минимального представления увеличивается с ростом числа выходных параметров. Найден ограниченный класс редуцированных передаточных многовыходных систем с размерностью, равной числу собственных мод.